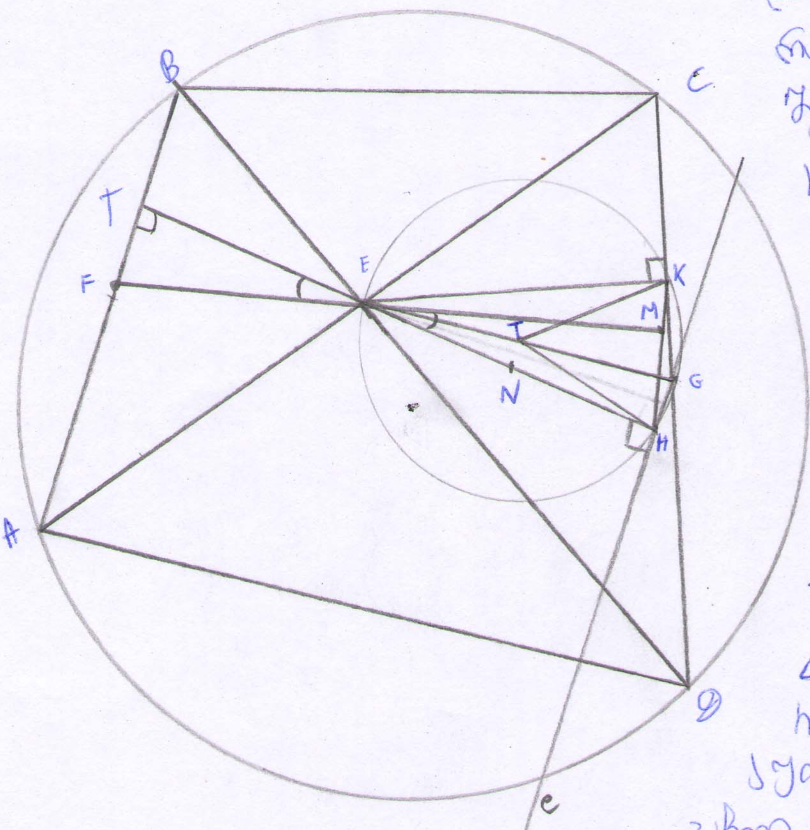
შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 53-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა №	21.04.2012/ მათ/ I/ 017

ამოცანა № 1 — გვერდი № 1



დავამტკიცოთ, რომ $EH = 2MN$.
რადგან N შუაწერტ. EH მონაკვეთის
შუაწერტილია, ე.ი. საჩვენებელია;
რომ ΔEMH მართკუთხაა.
($EN=NM=NH$ და
$\angle MEN=\angle NME$ და
$\angle NMH=\angle NHM$)

EKGH ოთხკუთხა. მისი
შემოხაზული წრეწირის დიამეტრი
არის EG.
$TE=TK=TH=TG$;
$\angle KGE=\angle KHE$
რადგან EK რკალზე დაყრდნობილი
კუთხეები, ე.ი. საკმარისი
ვაჩვენოთ, რომ $\angle KEG=\angle MEH$.
ანუ $\angle KEM=\angle GEH$.

~~E/G დიამეტრია/ HK ქორდია/ და~~

$AB \parallel e$ $\quad ET \perp AB$.

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 53-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა № [redacted]

21.04.2012/ მათ/ I/ 017

ამოცანა № 2

გვერდი № 1

განვიხილოთ ეს რიცხვები 1-დან 2012-ის ჩათვლით. ვთქვათ რომ რიცხვი მეგობრობს სხვა რიცხვთან მაშინ და მხოლოდ მაშინ, თუ ამ ორი რიცხვის ჯამები 3-ზე გაყოფისას სხვადასხვა ნაშთებს გვაძლევენ.

1-დან 2012-ის ჩათვლით გვაქვს 670 რიცხვი რომელიც 3-ზე გაყოფისას ნაშთს გვაძლევს 0-ს. 671 რიცხვი რომელიც ნაშთს გვაძლევს 1-ს და 671 რიცხვი, რომელიც ნაშთს გვაძლევს 2-ს. ~~ჩვენი შეთანხმების თანახმად, რომლებიც ...~~ დავყოფთ ეს რიცხვები ჯგუფებად. I ჯგუფი შევქმნათ ისეთი რიცხვებით რომლებიც იყოფიან 3-ზე. II – რომლებიც ნაშთს 1-ს გვაძლევენ და III რომლებიც ნაშთს 2-ს გვაძლევენ. ჩვენი შეთანხმების თანახმად I ჯგუფის თითოეული წევრი მეგობრობს II და III ჯგუფის ყველა წევრთან და არ მეგობრობს თავისი ჯგუფის წევრებთან. ანალოგიურად II ჯგუფის თითო წევრი მეგობრობს I და III ჯგუფის ყველა წევრთან და არ მეგობრობს საკუთარი თავისი ჯგუფის წევრებთან. III ჯგუფის თითო წევრი მეგობრობს I და II ჯგუფის ყველა წევრთან და არ მეგობრობს თავისი ჯგუფის საკუთარ წევრებთან. ამ შეთანხმებით არ ირღვევა არც ერთი პირობა. I ~~წევრის თითო~~ ~~წევრს~~ ჯგუფის თითო წევრს ჰყავს $671+671=1342 \geq 1341$ მეგობარი. II ჯგუფის თითო წევრს $670+671=1341 \geq 1341$ მეგობარი და III ჯგუფის თითო წევრს $670+671=1341 \geq 1341$ მეგობარი.

თუკი ამ 2012 რიცხვიდან ამოვირჩევთ 4 რიცხვს. მაშინ დირიხლეს პრინციპის თანახმად აუცილებლად მოიძებნება „არამეგობრები" რადგან აუცილებლად დაემთხვევა ორი მათგანის 3-ზე გაყოფისას მიღებული ნაშთები, რადგან და სულ ნაშთი შესაძლებელია სულ 3-ია რიცხვები კი – 4. რ.დ.გ. ამოცანა დამტკიცებულია.

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 53-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა №

21.04.2012/ მათ/ I/ 017

ამოცანა № 3

გვერდი № 1

თუ $a=b$, ამოცანა ტრივიალურია.
ზოგადობის შეუზღუდავად დავუშვათ, რომ $a>b$.
(თუ $a<b$, მაშინ a-ს და b-ს ადგილებს გავუცვლით).
განვიხილოთ ორი შემთხვევა: 1) $a>b$ და $c>d$
2) $a>b$ და $c<d$.

1) $a>b$ $\quad \left.\begin{array}{l} c>d \\ |c-d|=1 \end{array}\right| \Rightarrow c=d+1$

$a-b=a^n(d+1)-b^n\cdot d$

$a-b=a^n\cdot d+a^n-b^n\cdot d$

$\left.\begin{array}{l} a-b=d(a^n-b^n)+a^n \\ (a^n-b^n)\,\vdots\,(a-b) \end{array}\right| \Rightarrow a^n\,\vdots\,a-b \Rightarrow a^n\,\vdots\,b$

$a-b=a^n\cdot c-b^n\cdot d$ $\Big| \Rightarrow a\,\vdots\,b$

$a-b=a^n\cdot c-b^n\cdot d$

$a^n\cdot c-a=b^n\cdot d-b$ $\qquad a=bt \quad t\in\mathbb{Z}$

$a(a^{n-1}\cdot c-1)=b(b^{n-1}\cdot d-1)$

$a(a^{n-1}(d+1)-1)=b(b^{n-1}\cdot d-1)$

$bt(b^{n-1}t^{n-1}(d+1)-1)=b(b^{n-1}\cdot d-1)$

$t(b^{n-1}t^{n-1}d+b^{n-1}t^{n-1}-1)=b^{n-1}\cdot d-1$

$b^{n-1}td+b^{n-1}t-t=b^{n-1}d-1$

$(b^{n-1}d-1)(t-1)=-b^{n-1}t$